



Approximierte Zerlegung von intensitätsmodulierten Strahlungsfeldern

Antje Kiesel

antje.kiesel@uni-rostock.de

Universität Rostock

Neuruppin, 27.-28.03.2008



Gliederung

Problemstellung

Ergebnisse

Komplexitätssatz
Schrittweise Optimierung

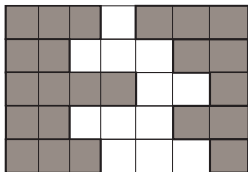
Kürzeste Wege in gerichteten Graphen

Zerlegung von Matrizen mit minimalem Gesamtfehler



Intensitätsmodulierte Bestrahlungsfelder

- ▶ Bestrahlungsfelder werden durch nichtnegative ganzzahlige $m \times n$ - Matrizen repräsentiert.
- ▶ Verwendung von Multileaf-Kollimatoren
- ▶ Lamellenpositionen werden durch 0-1-Matrizen, so genannte Segmente, beschrieben.



entspricht

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Gliederung

Problemstellung

Ergebnisse

Komplexitätssatz
Schrittweise Optimierung

Kürzeste Wege in gerichteten Graphen

Zerlegung von Matrizen mit minimalem Gesamtfehler



Definitionen (1)

Gegeben:

Intensitätsmatrix A mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen,
 A hat m Zeilen und n Spalten

▶ Eine 0-1-Matrix S heißt Segment, falls in jeder Zeile die Einsen aufeinanderfolgend sind.

▶ Zerlegung: $A = \sum_{i=1}^k u_i S_i$

▶ Delivery time (DT): $DT = \sum_{i=1}^k u_i$



Definitionen (1)

Gegeben:

Intensitätsmatrix A mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen,
 A hat m Zeilen und n Spalten

- ▶ Eine 0-1-Matrix S heißt Segment, falls in jeder Zeile die Einsen aufeinanderfolgend sind.

- ▶ Zerlegung: $A = \sum_{i=1}^k u_i S_i$

- ▶ Delivery time (DT): $DT = \sum_{i=1}^k u_i$



Definitionen (1)

Gegeben:

Intensitätsmatrix A mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen,
 A hat m Zeilen und n Spalten

- ▶ Eine 0-1-Matrix S heißt Segment, falls in jeder Zeile die Einsen aufeinanderfolgend sind.

- ▶ Zerlegung: $A = \sum_{i=1}^k u_i S_i$

- ▶ Delivery time (DT): $DT = \sum_{i=1}^k u_i$



Definitionen (1)

Gegeben:

Intensitätsmatrix A mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen,
 A hat m Zeilen und n Spalten

- ▶ Eine 0-1-Matrix S heißt Segment, falls in jeder Zeile die Einsen aufeinanderfolgend sind.

- ▶ Zerlegung: $A = \sum_{i=1}^k u_i S_i$

- ▶ Delivery time (DT): $DT = \sum_{i=1}^k u_i$



Definitionen (2)

- ▶ Notation: $a_{i,0} = a_{i,n+1} = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$
- ▶ DT-Zeilenkomplexität: $c_i(A) = \sum_{j=1}^n \max\{0, a_{i,j} - a_{i,j-1}\}$
- ▶ DT-Komplexität: $c(A) = \max_{i=1, \dots, m} c_i(A)$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow c(A) = \max(1 + 4, 7 + 2) = 9$$

Proposition

Die minimale Delivery Time (DT) einer Zerlegung von A ist $c(A)$.



Meine Aufgabe

- ▶ Finde Matrix A_{approx} mit $|a_{ij} - a_{ij}^{approx}| \leq \delta$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ mit minimalem $c(A_{approx})$
- ▶ Zeilen können unabhängig modelliert werden
- ▶ DT-Komplexität einer Zeile \mathbf{a} : $c(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n \max\{0, a_j - a_{j-1}\}$

Approximiertes DT-Problem (ADT)

Sei $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ein Vektor mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen der Länge n . Finde einen ganzzahligen Vektor \mathbf{d} mit $d_j \in [-\delta, \delta]$ für alle $j = 1, \dots, n$ und $c(\mathbf{a} + \mathbf{d})$ ist minimal.



Meine Aufgabe

- ▶ Finde Matrix A_{approx} mit $|a_{ij} - a_{ij}^{approx}| \leq \delta$ für alle $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$ mit minimalem $c(A_{approx})$
- ▶ Zeilen können unabhängig modelliert werden
- ▶ DT-Komplexität einer Zeile \mathbf{a} : $c(\mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n \max\{0, a_j - a_{j-1}\}$

Approximiertes DT-Problem (ADT)

Sei $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ ein Vektor mit nichtnegativen ganzzahligen Einträgen der Länge n . Finde einen ganzzahligen Vektor \mathbf{d} mit $d_j \in [-\delta, \delta]$ für alle $j = 1, \dots, n$ und $c(\mathbf{a} + \mathbf{d})$ ist minimal.



Gesamtfehler

Gesamtfehler (Total change): $TC(\mathbf{d}) = \sum_{j=1}^n |d_j|$.

Sei $\mathbf{b} := \mathbf{a} + \mathbf{d}$.

Approximiertes DT-Problem mit minimalem Gesamtfehler (ADTF)

Finde \mathbf{d} mit $d_j \in [-\delta, \delta]$ für alle $j = 1, \dots, n$ und

$$c(\mathbf{a} + \mathbf{d}) = \min \left\{ c(\mathbf{a} + \mathbf{d}') \mid d'_j \in [-\delta, \delta] \text{ für alle } j = 1, \dots, n \right\}$$

$$TC(\mathbf{d}) = TC(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n |b_j - a_j| \rightarrow \min$$



Gesamtfehler

Gesamtfehler (Total change): $TC(\mathbf{d}) = \sum_{j=1}^n |d_j|$.

Sei $\mathbf{b} := \mathbf{a} + \mathbf{d}$.

Approximiertes DT-Problem mit minimalem Gesamtfehler (ADTF)

Finde \mathbf{d} mit $d_j \in [-\delta, \delta]$ für alle $j = 1, \dots, n$ und

$$c(\mathbf{a} + \mathbf{d}) = \min \left\{ c(\mathbf{a} + \mathbf{d}') \mid d'_j \in [-\delta, \delta] \text{ für alle } j = 1, \dots, n \right\}$$

$$TC(\mathbf{d}) = TC(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \sum_{j=1}^n |b_j - a_j| \rightarrow \min$$



Gliederung

Problemstellung

Ergebnisse

Komplexitätssatz

Schrittweise Optimierung

Kürzeste Wege in gerichteten Graphen

Zerlegung von Matrizen mit minimalem Gesamtfehler



Graph von \mathbf{a}

Für einen Graphen $G = (V, E)$ und $v \in V$ sei $path(v)$ die Menge der Knoten w , die mit v verbunden sind.

Sei $G_\delta(\mathbf{a}) = (V, E)$ wie folgt definiert:

$$V := \{0, 1, 2, 3, \dots, n, n+1\}; \quad E := \emptyset;$$

for $j = 2$ to n **do**

$$max := \max\{a_k \mid k \in path(j-1)\};$$

$$min := \min\{a_k \mid k \in path(j-1)\};$$

if $max - a_j \leq 2\delta$ und $a_j - min \leq 2\delta$ **then**

$$E := E \cup (j-1, j);$$

end if

end for

→ Einträge der Knoten eines maximalen Pfades unterscheiden sich um $\leq 2\delta$ und Pfade haben maximale Länge



Beispiel zum Graph von \mathbf{a}

For den Vektor $\mathbf{a} = (1, 7, 8, 7, 4, 5, 1, 2, 8, 9)$ und $\delta = 1$ erhalten wir folgenden Graphen:

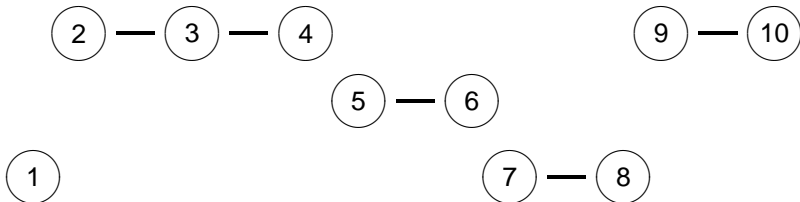


Abbildung: Graph von \mathbf{a} .



Pfadtypen

Sei p ein Pfad von $G_\delta(\mathbf{a})$. Sei $\max(p) := \max\{a_k \mid k \in p\}$ und $\min(p) := \min\{a_k \mid k \in p\}$.

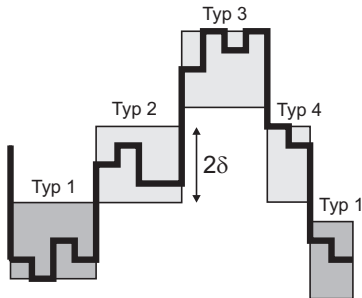
→ Sequenz (c_1, c_2, \dots, c_k) der Pfade von $G_\delta(\mathbf{a})$

Pfadtypen:

Typ 1

$$\max(p_i) < \max(p_{i-1})$$

$$\max(p_i) < \max(p_{i+1})$$





Pfadtypen

Sei p ein Pfad von $G_\delta(\mathbf{a})$. Sei $\max(p) := \max\{a_k \mid k \in p\}$ und $\min(p) := \min\{a_k \mid k \in p\}$.

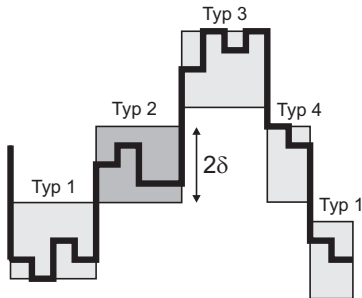
→ Sequenz (c_1, c_2, \dots, c_k) der Pfade von $G_\delta(\mathbf{a})$

Pfadtypen:

Typ 2

$$\max(p_i) > \max(p_{i-1})$$

$$\max(p_i) < \max(p_{i+1})$$





Pfadtypen

Sei p ein Pfad von $G_\delta(\mathbf{a})$. Sei $\max(p) := \max\{a_k \mid k \in p\}$ und $\min(p) := \min\{a_k \mid k \in p\}$.

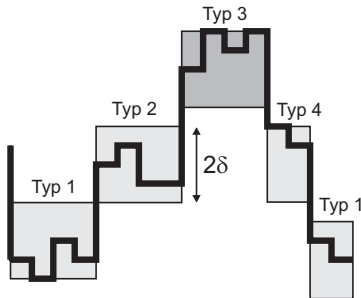
→ Sequenz (c_1, c_2, \dots, c_k) der Pfade von $G_\delta(\mathbf{a})$

Pfadtypen:

Typ 3

$$\max(p_i) > \max(p_{i-1})$$

$$\max(p_i) > \max(p_{i+1})$$





Pfadtypen

Sei p ein Pfad von $G_\delta(\mathbf{a})$. Sei $\max(p) := \max\{a_k \mid k \in p\}$ und $\min(p) := \min\{a_k \mid k \in p\}$.

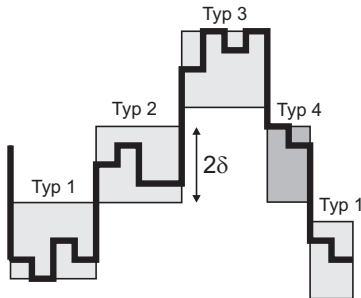
→ Sequenz (c_1, c_2, \dots, c_k) der Pfade von $G_\delta(\mathbf{a})$

Pfadtypen:

Typ 4

$$\max(p_i) < \max(p_{i-1})$$

$$\max(p_i) > \max(p_{i+1})$$





Komplexitätssatz

Proposition

Sei $G_\delta(\mathbf{a})$ der Graph von \mathbf{a} . Sei weiterhin $(r_1, p_2, r_2, p_3, r_3, \dots, p_s, r_s)$ die Sequenz der alternierenden Pfade vom Typ 3 und 1.

a) Es gibt eine zulässige Lösung \mathbf{b} von ADT und

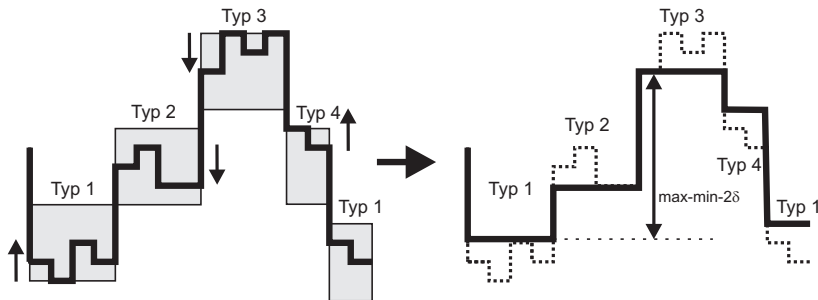
$$c^* := c(\mathbf{b}) = (\max(r_1) - \delta) + \sum_{l=2}^s (\max(r_l) - \min(p_l) - 2\delta)$$

b) Der Vektor \mathbf{b} aus a) ist eine optimale Lösung von ADT, d.h.

$$c^* = c(\mathbf{b}) = \min\{ c(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \mid d_j \in [-\delta, \delta] \text{ für alle } j = 1, \dots, n \}$$



Beweisidee des Komplexitätssatzes



Faustregel: Große Vektoreinträge (Berge) verkleinern, kleine Vektoreinträge (Täler) vergrößern.



Schrittweise Optimierung

Proposition

Für die minimale erreichbare Komplexität

$$\mathbf{c}^* := \min \{ \mathbf{c}(\mathbf{a} + \mathbf{d}) \mid d_j \in [-\delta, \delta] \text{ für alle } j = 1, \dots, n \}$$

und die Menge der optimalen Vektoren für das δ -Problem

$$L_\delta(\mathbf{a}) := \left\{ \mathbf{b} \mid |b_j - a_j| \leq \delta \text{ für alle } j = 1, \dots, n, \mathbf{c}(\mathbf{b}) = \mathbf{c}^* \right\}$$

sowie die Hintereinanderausführung $L_{\delta_2} \circ L_{\delta_1} : \mathbb{N}^n \rightarrow 2^{\mathbb{N}^n}$ mit

$$L_{\delta_2} \circ L_{\delta_1}(\mathbf{a}) := \{ \mathbf{b}_2 \mid \exists \mathbf{b}_1 \in L_{\delta_1}(\mathbf{a}) \text{ mit } \mathbf{b}_2 \in L_{\delta_2}(\mathbf{b}_1) \}$$

gilt für $\delta = \delta_1 + \delta_2$: $L_{\delta_2} \circ L_{\delta_1}(\mathbf{a}) = L_\delta(\mathbf{a})$.



Gliederung

Problemstellung

Ergebnisse

Komplexitätssatz
Schrittweise Optimierung

Kürzeste Wege in gerichteten Graphen

Zerlegung von Matrizen mit minimalem Gesamtfehler



Gesamtfehlerminimierung durch Kürzeste-Wege-Suche (1)

Azyklischer Digraph $G = (V, E)$ mit $V = V_1 \cup \dots \cup V_n \cup \{q, s\}$
und

$$V_j = \{v_{-\delta,j}, \dots, v_{0,j}, \dots, v_{\delta,j}\} \text{ für alle } j = 1, \dots, n.$$

Die Menge der Kanten ist

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cup E_1 \cup E_2 \text{ mit} \\ E_0 &= \{(q, v_{i,1}) \mid i = -\delta, \dots, \delta\} \\ E_1 &= \{(v_{l,j}, v_{i,j+1}) \mid l, i = -\delta, \dots, \delta, j = 1, \dots, n-1\} \\ E_2 &= \{(v_{i,n}, s) \mid i = -\delta, \dots, \delta\} \end{aligned}$$



Beispiel für Graph zur Gesamtfehlerminimierung

Für den Vektor $\mathbf{a} = (7, 3, 5)$ und $\delta = 1$ erhalten wir den Graphen

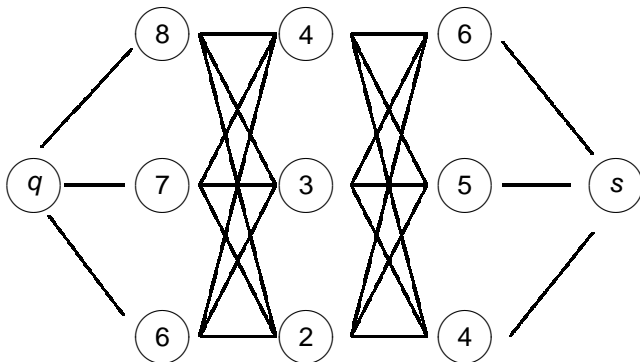


Abbildung: Graph zur Gesamtfehlerminimierung.



Notation

Wir verwenden von nun an die Notation

$$\max\{0, a\} = a_+.$$

Außerdem führen wir eine lexikographische Ordnung von Vektoren ein. Ein Vektor (a_1, a_2) ist kleiner als (b_1, b_2) , falls

$$a_1 < b_1 \text{ oder } (a_1 = b_1 \text{ und } a_2 < b_2).$$



Gesamtfehlerminimierung durch Kürzeste-Wege-Suche (2)

Die Kanten von G werden durch eine Gewichtsfunktion
 $w : E \rightarrow \mathbb{N}^2$ bewertet:

$$w(q, v_{i,1}) = ((a_1 + i)_+, |(a_1 + i)_+ - a_1|),$$

$$w(v_{l,j}, v_{l,j+1}) = (c, e), \text{ mit}$$

$$c = ((a_{j+1} + i)_+ - (a_j + l)_+)_+ \text{ und}$$

$$e = |(a_{j+1} + i)_+ - a_{j+1}|,$$

$$w(v_{i,n}, s) = (0, 0).$$

→ lexikographische Ordnung!

Ein kürzester q - s -Weg $(q, v_{i_1,1}, \dots, v_{i_n,n}, s)$ repräsentiert eine optimale Lösung \mathbf{b} mit $b_j = \max\{0, a_j + i_j\}$ für alle $j = 1, \dots, n$.



Fortführung des Beispiels

Für $\mathbf{a} = (7, 3, 5)$ wählen wir den Weg $(q, 6, 4, 4, s)$. Die Gewichte der Kanten sind:



Abbildung: Graph zur Gesamtfehlerminimierung.

Die Approximation ist $\mathbf{b} = (6, 4, 4)$ mit $c(\mathbf{b}) = 6$ und $TC(\mathbf{b}) = 3$.



Gesamtfehlerminimierung durch Kürzeste-Wege-Suche (3)

Die Zeilenkomplexität (= DT) von \mathbf{b} ist

$$c(\mathbf{b}) = w_1(q, v_{i_1,1}) + \sum_{j=2}^n w_1(v_{i_{j-1},j-1}, v_{i_j,j})$$

und der Gesamtfehler ist

$$TC(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = w_2(q, v_{i_1,1}) + \sum_{j=2}^n w_2(v_{i_{j-1},j-1}, v_{i_j,j})$$

Komplexität des Algorithmus: $O(n\delta^2)$



Gliederung

Problemstellung

Ergebnisse

Komplexitätssatz
Schrittweise Optimierung

Kürzeste Wege in gerichteten Graphen

Zerlegung von Matrizen mit minimalem Gesamtfehler



Zerlegung von Matrizen

Sei \mathbf{a}_i die i -te Zeile von A und

$$c_i = \min \{ c(\mathbf{a}_i + \mathbf{d}) \mid \mathbf{d}_j \in [-\delta, \delta] \text{ für alle } j = 1, \dots, n \}.$$

Für die Realisierung von A mit Fehlerschwelle δ , benötigen wir deshalb eine DT von

$$c_A = \max_{i \in [m]} c_i.$$

Ausreichend ist also:

Gegeben eine Matrix A mit nichtnegativen, ganzzahligen Einträgen, finde eine zulässige Approximation B mit $c(\mathbf{b}_i) \leq c_A$

für alle Zeilen $i = 1, \dots, m$ und $TC(B) = \sum_{i=1}^m TC(\mathbf{b}_i - \mathbf{a}_i) \rightarrow \min.$



Zusammenfassung

- ▶ Approximationsaufgabe ermöglicht starke Reduzierung der DT, z.B. Halbierung der DT bei $\delta = 2$ und einem Maximaleintrag der Vektoren von $L = 10$.
- ▶ Zahlreiche Algorithmen für ADT und ADTF
- ▶ Schrittweise Optimierung ist möglich.
- ▶ Gesamtfehlerminimierung bei ganzen Matrizen konnte erreicht werden.








Ausblick






Offene Fragen:

- ▶ Einfluss der Glättung der Vektoren auf die Anzahl der verschiedenen Segmente in der Zerlegung
- ▶ Betrachtung der technischen Nebenbedingungen (Tongue-and-Groove Constraint, Interleaf Collision Constraint, Leaf Overtravel Constraint)
- ▶ Betrachtung der physikalischen Nebenbedingungen (Mindestfeldgröße, optimale Feldformen, Leakage)



-  R.K. Ahuja, H.W. Hamacher. A network flow algorithm to minimize beam-on time for unconstrained multileaf collimator problems in cancer radiation therapy. *Wiley Periodicals, NETWORKS*, Vol. 45(1): 36-41, 2005
-  D. Baatar, H.W. Hamacher, M. Ehrgott, G.J. Woeginger. Decomposition of integer matrices and multileaf collimator sequencing. *Discrete Applied Mathematics*, 152(1-3): 6-34, 2005
-  N. Boland, H. W. Hamacher, F. Lenzen. Minimizing beam-on time in cancer radiation treatment using multileaf collimators. *Wiley Periodicals, NETWORKS*, 43(4): 226-240, 2004
-  T.R. Bortfeld, D.L. Kahler, T.J. Waldron, A.L. Boyer. X-ray field compensation with multileaf collimators. *Int. J. Radiat. Oncol. Biol. Phys.*, 28(3): 723-730, 1994
-  K. Engel. A new algorithm for optimal multileaf collimator field segmentation. *Discrete Applied Mathematics*, 152(1-3): 35-51, 2005



-  K. Engel, E. Tabbert. Fast simultaneous angle, wedge, and beam intensity optimization in inverse radiotherapy planning. *Optimization and Engineering*, 6(4): 393-419, 2005
-  T. Kalinowski. A duality based algorithm for multileaf collimator field segmentation with interleaf collision constraint. *Discrete Applied Mathematics*, 152: 52-88, 2005
-  T. Kalinowski. Multileaf collimator shape matrix decomposition. in: G.J. Lim. *Optimization in Medicine and Biology*. Auerbach Publishers Inc., 249-282, 2008
-  T. Kalinowski. Realization of intensity modulated radiation fields using multileaf collimators. in: R. Ahlswede. *Information transfer and combinatorics*. Springer, 4123, LNCS, 995-1040, 2006
-  J. Stein, T. Bortfeld, B. Dörschel, W. Schlegel. Dynamic X-ray compensation for conformal radiotherapy by means of multileaf collimations. *Radiother. Oncol.*, 32(2): 163-173, 1994



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit !!!